BNM BUREAU NATIONAL DE MÉTROLOGIE

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE

LABORATOIRE NATIONAL
HENRI BECQUEREL

Note technique LNHB/04-13

Arrondissage des résultats de mesure

Nombre de chiffres significatifs

M.M. Bé, P. Blanchis, C. Dulieu

28 avril 2004

BUREAU NATIONAL DE MÉTROLOGIE

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE

LABORATOIRE NATIONAL
HENRI BECQUEREL

Référence de la note technique	LNHB 2004/13

TITRE : Arrondissage des résultats de mesure, nombre de chiffres significatifs

RESUME :

L'objet de ce document est de rappeler la façon de présenter les résultats devant figurer dans un rapport scientifique ou technique et en particulier, de déterminer le nombre de chiffres significatifs de la valeur de la grandeur et de l'incertitude associée.

La conclusion sera de prendre la règle : si le premier chiffre significatif de l'incertitude est compris entre 5 et 9, le résultat sera arrondi à cette décimale (l'incertitude comportera donc 1 chiffre significatif) ; si le premier chiffre significatif est < 5, le résultat sera arrondi à la décimale suivante (incertitude à 2 chiffres).

Des fonctions d'application sont données en annexe.

A	**28 avril 2004**	
IND.	**DATE**	**OBJET**

	Auteur(s)	Vérificateur(s) *	Chef de Laboratoire	Chef du Service
Noms	MM Bé, P. Blanchis, C. Dulieu	B. Chauvenet	M.M. Bé	B. Chauvenet
Dates				
Signatures				

CEA-SACLAY, LNHB, Bât.602, 91191 GIF-SUR-YVETTE CEDEX
TÉL. : 01 69 08 85 67 – FAX : 01 69 08 26 19

I- Introduction

L'objet de ce document est de rappeler la façon de présenter les résultats devant figurer dans un rapport scientifique ou technique et en particulier, de déterminer le nombre de chiffres significatifs de la valeur de la grandeur et de l'incertitude associée.

Combien de chiffres significatifs doit-on donner pour l'incertitude de mesure ? Car en tout état de cause, si on indique l'incertitude absolue, le nombre de chiffres doit être cohérent avec celui de la grandeur.
Exemple : A = (123,45 ± 0,08) Bq et non A = (123,45 ± 0,081) Bq.

Les quelques paragraphes qui suivent valideront la règle :

Si le premier chiffre significatif de l'incertitude est compris entre 5 et 9, le résultat sera arrondi à cette décimale (l'incertitude comportera donc 1 chiffre significatif) ; si le premier chiffre significatif est < 5, le résultat sera arrondi à la décimale suivante (incertitude à 2 chiffres).

Des fonctions d'application sont fournies en annexe.

II- Notation

La notation utilisée suivra les recommandations émises par le « Guide pour l'expression des incertitudes de mesure », c'est-à-dire de préférence :
« A = 123,456 (11) Bq où le nombre entre parenthèses est la valeur numérique de l'incertitude type composée qui porte sur les deux derniers chiffres correspondants du résultat fourni. ». La troisième composante du résultat est l'unité dans laquelle est exprimée la valeur numérique.

Exemples :
A = 123,0 (1) Bq signifie A = (123,0 ± 0,1) Bq
A = 123 (1) Bq signifie A = (123 ± 1) Bq
A = 123,0 (11) Bq signifie A = (123,0 ± 1,1) Bq

III- Arrondissage des résultats

Le « bon sens » scientifique (?) amène à penser qu'un nombre assorti de nombreuses décimales n'a pas de signification et qu'il « faut » l'arrondir.

Traditionnellement, on applique la règle empirique suivante : « si le nombre qui suit la décimale où l'on souhaite arrondir est supérieur ou égal à 5, l'arrondi se fait vers le chiffre supérieur ; sinon il se fait vers le chiffre inférieur ».

Exemple :

Nombre brut	5,6789123	5,432167
Décimale d'arrondi	0,001	0,001
Nombre arrondi à 3 décimales	5,679	5,432
Erreur d'arrondi	+ 0,0000877	- 0,000167
Arrondi à 5 décimales	5,67891	5,43217

Mais le fait d'arrondir le nombre brut a introduit une erreur sur sa valeur. Cette erreur est inférieure au 5/9 de la décimale d'arrondi.

IV- Détermination du nombre de chiffres significatifs

Cependant, tout résultat de mesure devant figurer sur une note technique comprend trois composants :
- la valeur de la grandeur ;
- l'incertitude associée ;
- l'unité.

La connaissance de l'incertitude impose le nombre de chiffres significatifs de la grandeur.

La détermination de la décimale d'arrondi devra suivre les règles :
- la troncature du nombre ne devra pas faire perdre des décimales contenant une information : ce sont les décimales significatives;
- elle ne devra pas laisser des décimales dépourvues d'information : les chiffres non significatifs.

Le nombre de chiffres significatifs d'un résultat dépend de la valeur de son incertitude. On peut, avant tout calcul, faire les remarques suivantes :

En reprenant l'exemple ci-dessus :

m	nombre brut	5,6789123	5,6789123
u	incertitude	0,006243	0,002341
x	facteur d'arrondissage	5	5
u/x		0,0012486	0,0004682
s	décimale d'arrondi	0,001	0,0001
m_r	nombre arrondi à *s* décimales	5,679	5,6789
	nombre final	5,679 (6)	5,6789 (23)
r	erreur d'arrondi	+ 0,0000877	- 0,0000123

On cherche un nombre *x,* tel que l'arrondissage d'un nombre *m* n'entraîne pas une erreur sur sa valeur supérieure à *u/x*, *u* étant l'incertitude de mesure et *x* un facteur à déterminer (fixé à 5 dans l'exemple ci-dessus).

On remarque :

• L'arrondissage simple d'un nombre obéit à *r £ s/2*, ce qui reste toujours vrai.

• Il faut déterminer la place de la décimale d'arrondi à partir de l'incertitude, c'est-à-dire trouver un nombre *x*, tel que $s \leq u/x$, *u* étant l'incertitude associée au résultat. Cependant, pour éviter de laisser des décimales non significatives on vérifiera aussi une relation du type $u/10x < s$.
Ce qui établit une valeur d'arrondi telle que : *r £ u/2x*.

• Si $x < 1$ on a : $u/x > u$; donc dans certains cas on pourra avoir : $r > u/2$ et le résultat arrondi pourra se trouver en dehors de l'intervalle $m \pm u$. Ce qui implique que $x > 1$.

• Si $x > 5$, on a *r* £ *u/10* et le nombre de chiffres significatifs de l'incertitude pourra, dans certains cas, être supérieur à 2. Ce qui paraît déraisonnable.

=> Le nombre *x* à retenir doit donc être compris entre 1 et 5.

<u>Remarques sur la valeur de *x* :</u>

1) Le nombre $x = 5$ correspond au souhait de l'ancienne norme AFNOR NF X 06-044 « Pour obtenir un résultat final comportant un nombre de chiffres compatibles avec l'incertitude de mesure, on arrondit le résultat de façon que l'erreur due à l'arrondissage soit inférieure au 1/10 de l'incertitude de mesure. »

Cette règle peut aussi s'exprimer de la manière commune : si le premier chiffre significatif de l'incertitude est compris entre 5 et 9, le résultat sera arrondi à cette décimale (l'incertitude comportera donc 1 chiffre significatif) ; si le premier chiffre significatif est < 5, le résultat sera arrondi à la décimale suivante (incertitude à 2 chiffres).

En reprenant l'exemple précédent :

m	nombre brut	5,6789123	5,6789123
u	incertitude	0,006243	0,002341
x	facteur d'arrondissage	5	5
	résultat	5,679 (6)	5,6789 (23)

2) Nos collègues du PTB utilisent $x = 3$, i.e. l'erreur d'arrondissage reste inférieure au 1/6.

V- Valeur de l'erreur sur l'arrondissage

Quelle est la valeur de *x* à retenir ? Peut-on estimer plus précisément cette valeur, compte tenu des mesures communément réalisées dans le laboratoire ? Quelle erreur sur l'arrondissage peut, raisonnablement, être acceptée ?

Soit une série de *n* mesures $\{Xi\}$, la valeur moyenne des résultats $\{Xi\}$ est définie par :

$$m = \frac{1}{n}\sum_i Xi$$

et la variance expérimentale de la moyenne des n mesures $\{Xi\}$ comme :

$$s_m^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_i (Xi - m)^2$$

La grandeur s_m étant déterminée à partir de données expérimentales, quelle est son incertitude ?

Si la grandeur *X* est distribuée selon une loi normale, la variance de s_m^2 est :

$$D\left(s_m^2\right)=\overline{\left(s_m^2-\overline{s_m^2}\right)^2}$$

L'incertitude relative sur la valeur de la variance expérimentale est :

$$d\left(s_m^2\right)=\frac{\sqrt{D\left(s_m^2\right)}}{\overline{s_m^2}}=\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

L'incertitude U_X associée à la valeur expérimentale *m* est proportionnelle à la racine carrée de s_m^2 et son incertitude relative est :

$$d\left(U_X\right)=\frac{U\left(U_X\right)}{U_X}=\frac{1}{2}d\left(s_m^2\right)\approx\sqrt{\frac{1}{2\left(n-1\right)}}$$

Ainsi il faut effectuer de l'ordre de cinquante mesures pour obtenir une incertitude relative de l'écart type expérimental de 10 %.

a) Quel est le nombre de mesures communément effectuées pour déterminer l'activité d'un échantillon par exemple ? Dans le cas d'une inter-comparaison ? D'un raccordement ?

La plupart des mesures d'activité massique sont réalisées avec 10 sources maximum ce qui entraîne une incertitude de l'écart-type expérimental de 24 %. Avec 5 sources, cette incertitude vaut 36 %. Tout cela en supposant une distribution gaussienne, bien difficile à démontrer.
De plus, compte tenu des inévitables approximations et interprétations lors de la détermination des incertitudes au moyen de méthodes de type B (la loi de distribution est généralement inconnue sauf quelques cas particuliers - loi de Poisson par exemple -) l'incertitude composée du résultat est rarement connue à mieux que 50 %.

b) Et *quid* de l'arrondissage après une « évaluation » de données ?

Un jeu de données, pour une grandeur déterminée, excède rarement la dizaine.
Dans un certain nombre de cas l'incertitude finale retenue est l'incertitude externe, donc l'incertitude relative sur cette incertitude est sûrement supérieure au 1/10.
Dans d'autre cas l'incertitude finale est l'incertitude-type obtenue à partir des incertitudes-types expérimentales fournies par les expérimentateurs. Alors, le calcul de la variance est exact, c'est-à-dire que l'incertitude relative sur l'incertitude-type évaluée est aussi bonne que les incertitudes relatives sur les incertitudes-types expérimentales.
Dès lors on revient à la question précédente : quelle est l'incertitude relative sur l'incertitude-type expérimentale ?

Conclusions :

1) La règle du 1/10 : « Pour obtenir un résultat final comportant un nombre de chiffres compatibles avec l'incertitude de mesure, on arrondit le résultat de façon que l'erreur due à l'arrondissage soit inférieure au 1/10 de l'incertitude de mesure. » semble optimiste.

2) Mais cette règle est applicable dans quelques cas.

3) Par ailleurs, les résultats de mesure obtenus sont ensuite souvent utilisés dans des programmes de calculs où de nouvelles sources d'erreur sont introduites. En particulier, on ne peut que rappeler la recommandation : « Attendre la fin des calculs pour arrondir ». Dans cet esprit, il est préférable de conserver la règle du 1/10 : si le premier chiffre significatif de l'incertitude est compris entre 5 et 9, le résultat sera arrondi à cette décimale (l'incertitude comportera donc 1 chiffre significatif) ; si le premier chiffre significatif est < 5, le résultat sera arrondi à la décimale suivante (incertitude à 2 chiffres).

4) Exemples :

valeur	incertitude	Résultat
123,567 8912	0,000 512 3	123,567 9(5)
123,567 891 2	0,000 492 3	123,567 89(49)
987,21	10,567	987(11)
987,21	1,056 7	987,2(11)
98 765,432 1	56,123	98 770(60)
98 765,432 1	5,612 3	98 765(6)
98 765,432 1	0,561 23	98 765,4(6)

On trouvera, en Annexe, des fonctions pour arrondir un nombre et son incertitude.

Annexe

Fonctions Excel :

```
'
'Retourne la valeur arrondie d'un résultat (ou de son incertitude) en fonction de son incertitude
' pour x = 5

    Function ResRond(Resultat, Incertitude)
      With Application
        ResRond = .Round(Resultat, -1 - Int(.Log(Incertitude / 50)))
      End With
    End Function

'
'Retourne la valeur arrondie d'un résultat (ou de son incertitude) en fonction de son incertitude
' la même pour x = 3

    Function ResRond(Resultat, Incertitude)
      With Application
        ResRond = .Round(Resultat, -1 - Int(.Log(Incertitude / 30)))
      End With
    End Function

'
'Retourne SOUS FORMAT TEXTE la valeur arrondie d'un résultat
'et de son incertitude ( ex : 12,345(26) )
' pour x = 5
'
    Function ResRondTxt(Resultat, Incertitude)
      With Application
        nb_chif = -1 - Int(.Log(Incertitude / 50))
        ResRondTxt = .Fixed(ResRond(Resultat, Incertitude), nb_chif) + _
                "(" + .Fixed(ResRond(Incertitude, Incertitude) * 10 ^ nb_chif, 0) + ")"
      End With
    End Function
```